На правах рукописи.

Решение теоремы Ферма.

В Википедии - свободной энциклопедии - в статье «Великая теорема Ферма» о данной теореме сказано следующее:

«Для любого натурального числа $n > 2$уравнение

$$a^n + b^n = c^n$$

не имеет натуральных решений a, b и c.

В общем виде теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта. Дело в том, что Ферма делал свои пометки на полях читаемых математических трактатов и там же формулировал пришедшие на ум задачи и теоремы. Теорему, о которой ведётся речь, он записал с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его можно было поместить на полях книги:

«Наоборот, невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашел этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него.

Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.»

Несколько позже сам Ферма опубликовал доказательство частного случая для $n = 4$, что добавляет сомнений в том, что у него было доказательство общего случая.

Эйлер в 1770 году доказал теорему для случая $n = 3$, Дирихле и Лежандр в 1825 — для $n = 5$, Ламе — для $n = 7$.

В 1980-х годах появился новый подход к решению проблемы. Из гипотезы Морделла, доказанной Фальтингсом в 1983 году, следует, что уравнение $a^n + b^n = c^n$при $n > 3$ может иметь лишь конечное число взаимно простых решений.

Последний, но самый важный, шаг в доказательстве теоремы был сделан Уайлсом в сентябре 1994 года. Его 130-страничное доказательство было опубликовано в журнале «Annals of Mathematics». Доказательство основано на предположении немецкого математика Герхарда Фрая о том, что Великая теорема Ферма является следствием гипотезы Таниямы — Симуры (это предположение было доказано Кеном Рибетом при участии Ж.-П.Серра).

Первый вариант своего доказательства Уайлс опубликовал в 1993 году (после 7 лет напряжённой работы), но в нём вскоре был обнаружен серьёзный пробел, который с помощью Ричарда Лоуренса Тейлора удалось достаточно быстро устранить. В 1995 году был опубликован завершающий вариант».

В данной работе я попытаюсь найти то первое решение самого Пьера Ферма. Искать решение я буду, не прибегая к высшей математике, так как в середине XVII века ни дифференциально-интегрального исчисления, ни аналитической геометрии практически не было.

Начну с теоремы Пифагора.

В Википедии - свободной энциклопедии - в статье «Теорема Пифагора» сказано:

«Изначально теорема была сформулирована следующим образом:

В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

То есть, обозначив длину гипотенузы треугольника через c, а длины катетов через a и b:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Обе формулировки теоремы эквивалентны, но вторая формулировка более элементарна, она не требует понятия площади. То есть второе утверждение можно проверить, ничего не зная о площади и измерив только длины сторон прямоугольного треугольника».

В той же статье приведено одно из многочисленных доказательств этой теоремы:

«Доказательство через равнодополняемость.

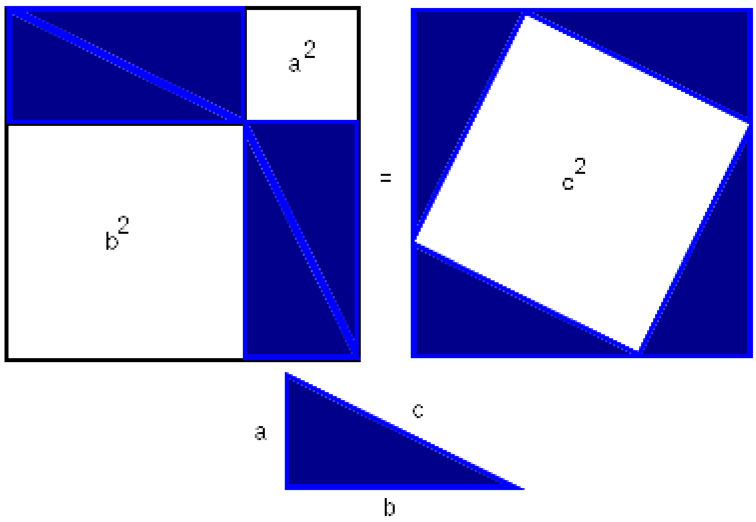

Рис.1

1. Расположим четыре равных прямоугольных треугольника так, как показано на рисунке 1.

2. Четырёхугольник со сторонами *c* является квадратом, так как сумма двух острых углов 90°, а развёрнутый угол — 180°.
3. Площадь всей фигуры равна, с одной стороны, площади квадрата со стороной (a+b), а с другой стороны, сумме площадей четырёх треугольников и площади внутреннего квадрата.

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2;$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2;$$
$$c^2 = a^2 + b^2;$$

Что и требовалось доказать».

При доказательстве теоремы Пифагора я буду пользоваться чуть изменённым доказательством через равнодополняемость.

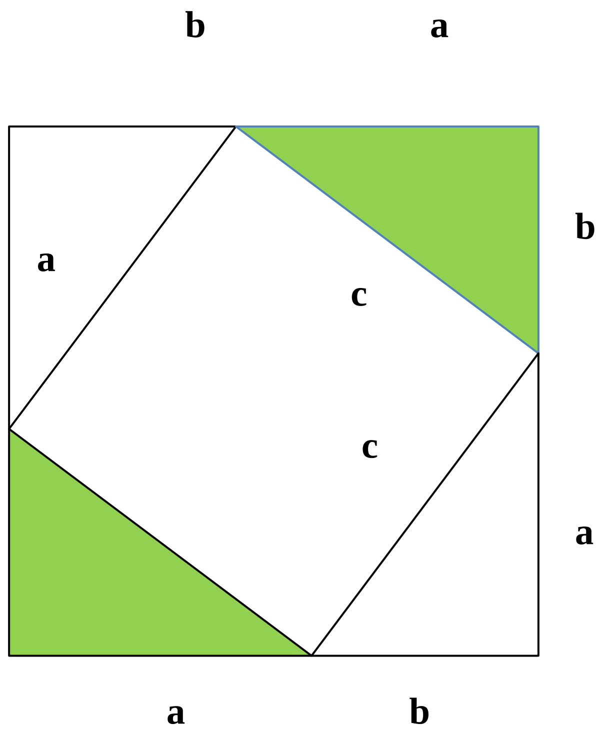

Рис. 2

Площади четырёх прямоугольных треугольников дополняют площадь квадрата, стороной которого является гипотенуза прямоугольного треугольника «**c**», до площади квадрата, сторона которого равна сумме катетов прямоугольного треугольника «**a + b**».

Площадь каждого из четырёх прямоугольных треугольников равна:

$F_{ab} = ½ * a * b$.

Общая площадь четырёх прямоугольных треугольников:

$\sum F_{ab} = 4 * ½ * a * b = 2 * a * b$.

Площадь квадрата со стороной «a+b»:

$F_{a+b} = (a+b)^2 = a^2 + 2a*b + b^2$.

Площадь квадрата со стороной «c»:

$F_c = c^2$.

$F_c = F_{a+b} - \sum F_{ab}$

$c^2 = a^2 + 2a*b + b^2 - 2*a*b = a^2 + b^2$,

то есть $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$, теорема Пифагора доказана.

Таким образом, квадрат раскладывается на два квадрата.

От показателя степени равному 2 перейдём к показателю степени равному 3.

То есть от площади к объёму. Квадраты станут кубами.

На рисунке 2 показана горизонтальная проекция наших фигур.

На рисунке 3 – вертикальная проекция.

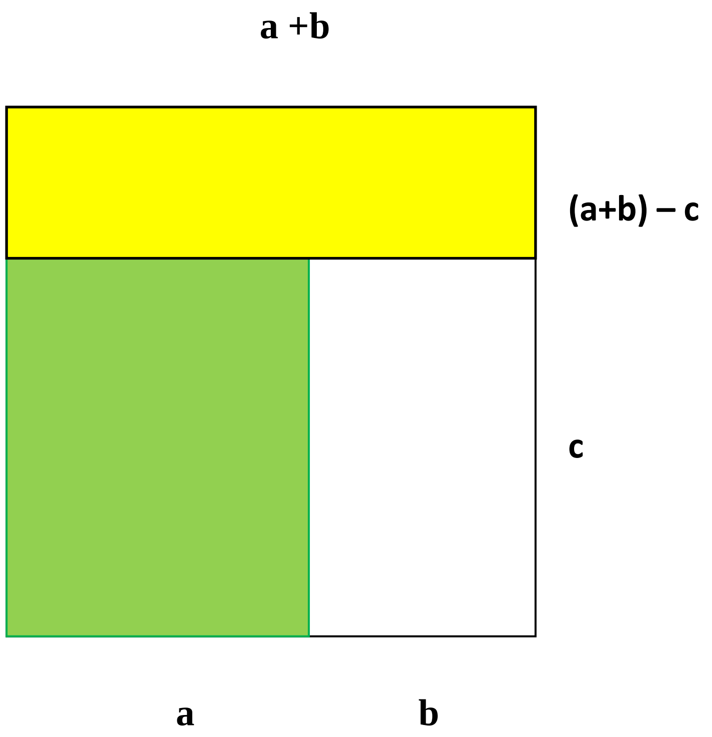

Рис. 3.

Куб со сторонами , равными суммой «a» и « b», включает в себя во-первых, куб со стороной «c», во-вторых, параллелепипед, в-третьих, четыре треугольные призмы, в основании, которых лежат катеты «a» и « b», соответственно, и в этом случае применим метод равнодополняемости.

Имеем: объём куба со стороной (a + b):

$V_{(a+b)} = (a + b)^3$;

Объём треугольной призмы:

$V_{ab} = F_{ab} * c = ½*a*b* c$

$V_{(a+b)-c} = [(a +b) – c]* (a + b)^2 =$

Объём параллелепипеда $(a +b)^3 – c* (a + b)^2$

Тогда объём куба со стороной «c» будет равен:

$V_c = V_{(a+b)} - V_{(a+b)-c} - 4* V_{ab} = (a + b)^3 - (a +b)^3 + c* (a + b)^2 – 4*½*a*b* c =$

$V_c = c* (a + b)^2 - 2*a*b* c = c*(a^2 + b^2)$.

Но, $V_c = c^3$, следовательно, $\boldsymbol{V_c = c*(a^2 + b^2)}$, или:

$c^3 = c*(a^2 + b^2)$, или

$c^2 = a^2 + b^2$, то есть получилась теорема Пифагора.

Таким образом, как и писал Пьер Ферма: «… невозможно разложить куб на два куба…»

Объём куба «c^3» раскладывается на площади квадратов, построенных на катетах «a» и «b», умноженных на высоту, то есть на сторону куба «c», квадрат которой как раз равен сумме квадратов катетов.

$a^2 + b^2$ – сумма квадратов катетов, то есть теорема Пифагора, выступает в случае куба множителем, который назовём ***множителем Пифагора***.

Проверим наше решение на числах.

Возьмём Пифагорову тройку чисел: 3, 4 и 5. Степень равную 3.

$c^3 = 5^3 = 125$; $a^3 = 3^3 = 27$; $b^3 = 4^3 = 64$;

$c^3 = 125 \neq 27 + 64 = 91$

$a^2 = 3^2 = 9$; $b^2 = 4^2 = 16$;

$c^3 = 125 = 5* (9 + 16) = 5* 25 = 125$, что и требовалось доказать.

Примем показатель степени чисел, равный 4.

$C^4 = 5^4 = 625$; $a^4 = 3^4 = 81$; $b^4 = 4^4 = 256$;

$C^4 = 625 \neq 81 + 256 = 337$;

$a^2 = 3^2 = 9$; $b^2 = 4^2 = 16$;

$c^4 = 625$;

$5* (9 + 16) = 5* 25 = 125$, чтобы в итоге получилось 625, необходимо 125 умножить на 5, то есть на «с».

$c^4 = 625 = 5* 5* (9 + 16) = 25* 25 = 625$.

Перейдём на буквенные обозначения:

$c^4 = c^2*(a^2 + b^2)$.

Эту формулу можно получить из уравнения теоремы Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$,

соответственно, $a = (c^2 – b^2)^{½}$, $b = (c^2 – a^2)^{½}$.

Площадь прямоугольника, построенного на сторонах «a» и « b» или удвоенная площадь прямоугольного треугольника равна:

$a*b = (c^2 – b^2)^{½} * (c^2 – a^2)^{½} = (c^4 – c^{2*}a^2 - c^2*b^2 + a^2*b^2)^{1/2}$,

соответственно, $a^2*b^2 = c^4 – c^{2*}a^2 - c^2*b^2 + a^2*b^2$, или

$c^4 = c^{2*}(a^2 + b^2)$, то есть словами Ферма «биквадрат» не раскладывается на два «биквадрата».

$c^4 = c^{4-2}*(a^2 + b^2)$ или в общем виде:

$\mathbf{c^n = c^{n-2}*(a^2 + b^2)}$.

Рассмотрим частные случаи: при степени 2, 1 и 0.

$c^2 = c^{2-2} * (a^2 + b^2) = c^0 * (a^2 + b^2) = a^2 + b^2$, перед нами опять же теорема Пифагора.

$c^1 = c^{1-2} * (a^2 + b^2) = c^{-1} * (a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)/ (a^2 + b^2)^{1/2} = (a^2 + b^2)^{1/2}$

$c^0 = c^{0-2} * (a^2 + b^2) = c^{-2} * (a^2 + b^2) = (a^2 + b^2) / (a^2 + b^2) = 1$.

$\mathbf{c^n = c^{n-2} * (a^2 + b^2).}$

Теперь, когда решены частные случаи при показателях степени 0, 1, 2, 3, 4, теорему Ферма можно решить ещё проще, из уравнения $c^2 = a^2 + b^2$.

Если $c^2 = a^2 + b^2$, то, $c^1 = (a^2 + b^2)^{1/2}$, соответственно,

$\mathbf{c^n = (a^2 + b^2)^{n/2}.}$

Таким образом, при любых значениях $\mathbf{n > 2}$

$\mathbf{c^n \neq a^n + b^n}$,

так как $\mathbf{c^n = (a^2 + b^2)^{n/2}.}$

Поэтому вслед за Пьером Ферма можно повторить: «…невозможно разложить куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем». Решение получилось гораздо больше книжных полей «Арифметики» Диофанта, о чем и говорил Пьер Ферма.

А.В. Колодин 10 августа 2013 года.

Ссылка на источники:

Теорема Пифагора:
олучилосьhttp://ru.wikipedia.org/wiki/%D2%E5%EE%F0%E5%EC%E0_%CF%E8%F4%E0%E3%EE%F0%E0

Великая теорема Ферма:
http://ru.wikipedia.org/wiki/%C2%E5%EB%E8%EA%E0%FF_%F2%E5%EE%F0%E5%EC%E0_%D4%E5%F0%EC%E0